代数幾何学シンポジウム記録
1989年度 pp.76-92

偏極K3曲面のモジュライ空間の小平次元

東京電機大学理工学部　金銅誠之
(Shigeyuki Kondo)

はじめに。 種数gの曲線のモジュライ空間は、gを大きくすると一般型（すなわち、小平次元と多様体としての次元が一致）になることが、Mumford－Harris によって得られている（[4]）。同様の結果は、主偏極アーベル多様体の場合にも、Tai－Freitag－Mumford によって示されている (cf. [8])。ここでは、K3曲面の場合に、上記の問題を考えてみる。この場合、偏極付きK3曲面を考えると、そのモジュライ空間が、guasi-projective variety として存在する。更に、このモジュライ空間は、19次元Ⅳ型有界対称領域の算術的部分群による商空間として記述出来ることが知られている（[6]）。我々が、考える問題は、次の様にのべることができる。

問題　偏極次数を大きくした時、このモジュライ空間の小平次元はどうなるか？

結果は、特別な偏極次数の場合、このモジュライ空間は一般型になる、というものである。(§2. Theorem 1)

上記の問題を調べるには、退化を用いる幾何的アプローチと、保型函数論を用いる方法が考えられるが、ここでは後者の方法を取る。

§1. 偏極K3曲面のモジュライ空間

代数曲面 S は、標準束 K_S が自明、且 $h^1(\mathcal{O}_S)=0$ の時、K3曲面と呼ばれる。偏極K3曲面(次数 $2d$ の)とは、K3曲面 S と、その上の因子 H の組 (S, H) で次の条件を満たすものを云う: (i) H は numerically effective, (ii) $H^2=2d$, (iii) H は primitive, すなわち、$H \sim mC$ ならば $m=\pm 1$。$\mathcal{K}_{2d}$ を、次数 $2d$ の偏極K3曲面のモジュライ空間とする。Piatetskii-Shapiro, Shafarevich ([6]) による Torelli 型定理によって、$\mathcal{K}_{2d}$ は、次の様に、有界対称領域の算術的部分群による商空間として表わせる。

以下、lattice とは、free $\mathbb{Z}$-module of finite rank と、その上の symmetric bilinear form の組を意味する。今、次の lattice を考える: $L_{2d} = U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus \langle -2d \rangle$。ここで $U = \left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, E_8 は、rank 8 の negative definite な lattice で、その交点形式が、E_8 型 Dynkin 行列に対応するも

の、$\langle -2d \rangle$ は rank 1 の交点行列が $(-2d)$ の lattice とする。
$\Omega_{2d} = \left\{ [\omega] \in \mathbb{P}(L_{2d} \otimes \mathbb{C}) \mid \langle \omega, \omega \rangle = 0 \ , \langle \omega, \bar{\omega} \rangle > 0 \right\}$ とおく。
Ω_{2d} は偏極K3曲面の周期領域に他ならない（但し $\langle\ ,\ \rangle$ は L_{2d} の symmetric bilinear form を $L_{2d} \otimes \mathbb{C}$ に拡張したもの）。
Ω_{2d} は、2つの連結成分から成るが、その一方を $\mathcal{D}_{2d}$ と書く。$\mathcal{D}_{2d}$ は、IV型有界対称領域であることが知られている。
更に、$\widetilde{\Gamma}_{2d} := \mathrm{Ker}\left\{ O(L_{2d}) \to O(L_{2d}^{*}/L_{2d}) \right\}$, $\Gamma_{2d} := \left\{ \varphi \in \widetilde{\Gamma}_{2d} \mid \varphi(\mathcal{D}_{2d}) \subset \mathcal{D}_{2d} \right\}$ と置く。但し、$O(L_{2d})$ は直交群、$L_{2d}^{*} := \mathrm{Hom}(L_{2d}, \mathbb{Z})\ (\supset L_{2d})$、有限Abel群 L_{2d}^{*}/L_{2d} 上には自然に、L_{2d} より、二次形式が引き起されるが、$O(L_{2d}^{*}/L_{2d})$ は、その直交群を意味する。Γ_{2d} は、$SO(2, 19)_{\mathbb{R}}$ の算術的部分群で、特に、$\mathcal{D}_{2d}$ に、properly discontinuous に作用し、従って、Cartan の定理より、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ は normal analytic space となる。上記 Torelli 型定理は、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ が、次数 $2d$ の偏極K3曲面のモジュライ空間と双有理同値であることを意味している。

§2. 主結果と証明の概略

我々の目標は、次を示すことである。

Theorem 1. $d = m^2 \ (m \in \mathbb{N})$ と仮定する。更に、m

は、十分大きな素数 p で割れるとする。この時、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ は一般型である。

<u>注意</u>. $d = m^2 = p^2 \cdot k^2$ としよう。この時、lattice の包含関係 $L_2 \supset L_{2p^2} \supset L_{2d}$ が考えられる。これは算術的部分群の包含関係 $\Gamma_2 \supset \Gamma_{2p^2} \supset \Gamma_{2d}$ を引き起し、従って、写像

$$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d} \to \mathcal{D}_{2p^2}/\Gamma_{2p^2} \longrightarrow \mathcal{D}_2/\Gamma_2$$

を得る。Theorem 1 は、次より従う。

<u>Theorem 2</u>. $d = p^2$ (p: 素数) で、p は十分大とする。このとき、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ は一般型である。

我々の問題の難点は、商空間 $\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ が、商特異点を持つことと、non-compact な点である。そのため、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ の、良い compactification を考える必要がある。一般論 ([1]) より、$\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ は、高々商特異点しか持たない toroidal compactific. $\overline{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}$ をもつ。$\widetilde{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}$ を $\overline{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}$ の一つの resolution とする。我々の問題は、$\dim H^0(\widetilde{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}, K_{\widetilde{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}})$ を評価することと同値である。

定義　正則関数 $f:\mathcal{D}_{2d}\to\mathbb{C}$ が（Γ_{2d} に関する）、weight k の保型形式であるとは、

$$\gamma^* f = J(\gamma)^{-k}\cdot f \quad \text{for } \forall\gamma\in\Gamma_{2d}$$

を満たす時である。但し、$J(\gamma)$ は γ の Jacobian とする。$A_k(\Gamma_{2d})$ を weight k の保型形式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。$\mathbb{C}^{19}\supset\mathcal{D}_{2d}$ を、有界領域としての realization とし、$z=(z_1,\cdots,z_{19})$ を、$\mathbb{C}^{19}$ の座標とし、$\omega=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_{19}$ とする。$f\in A_k(\Gamma_{2d})$ に対し、定義より、$f\omega^{\otimes k}$ は Γ_{2d}-不変である。従って、$f\omega^{\otimes k}\in H^0((\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d})^\circ, K_{(\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d})^\circ})$ と考えられる。但し、variety X に対し、X° は、その smooth locus を表わす。Theorem 2 の証明は、次の 2 つの part に分けられる：

(A) $f\omega^{\otimes k}$ は、holomorphic に $\overline{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}^\circ$ に拡張できるか？

(B) $f\omega^{\otimes k}$ は、$\overline{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}$ の特異点の resolution に、holomorphic に拡張できるか？

問題(B)は、商特異点が canonical か？という問題と同値であり、Reid－Tai の判定法（[8], Prop. 3.1）により、少なくとも、$d=p^2$ の場合、問題(B) は YES である。以下の章

で、(A)の問題を詳しく述べていく。

§3. 例(上半平面の場合)

問題Aを考えるうえで、toroidal compactification $\overline{\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}}$ の構成方法を知っておく必要がある。しかしながら、ここで、その一般論を述べることは、紙数と筆者の力不足で、できない。興味ある方は [1], [5] を見て頂くことにして、ここでは、最とも簡単な場合、すなわち、上半平面 H^+ とそれに作用する $SL(2,\mathbb{Z})$ の場合を復習し、必要な概念を押さえることにする。(より詳しくは[5]参照)

まず、$H^+/SL(2,\mathbb{Z})$ の佐武コンパクト化 $(H^+/SL(2,\mathbb{Z}))^*$ は、集合としては

$$(H^+/SL(2,\mathbb{Z}))^* = (H^+ \amalg \{\text{実軸上の有理点}, \infty\})/SL(2,\mathbb{Z})$$

であった。実軸上の有理点は、$\{\infty\}$ と $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用の下に、同値であるから、

$$(H^+/SL(2,\mathbb{Z}))^* = (H^+ \amalg \{\infty\})/SL(2,\mathbb{Z}) = H^+/SL(2,\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$$

となる。この場合、佐武コンパクト化と toroidal compactif. は一到する。以下、toroidal compactif. の構成方法を述べる。

$U(\infty)_{\mathbb{Z}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ と置くと、$U(\infty)_{\mathbb{Z}}$ は $\{\infty\}$ の stabilizer と一到する。定義より、H^+ は $\mathbb{C}$ に埋め込まれており、$U(\infty)_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{C}$ に平行移動として作用する。

明らかに、次の埋め込みが引き起こされる：

$$\begin{array}{ccccc} H^+/U(\infty)_{\mathbb{Z}} & \subset & \mathbb{C}/U(\infty)_{\mathbb{Z}} & \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C}^* \\ \| & & \| & \\ \{w \in \mathbb{C} \mid 0<|w|<1\} & \subset & \{w \mid 0<|w|\} & \end{array}$$

但し、H^+ の座標を z とするとき、$w = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ である。

ここでトーラス embedding "$\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$" を考えることで、$H^+/U(\infty)_{\mathbb{Z}}$ の一点コンパクト化

$$\overline{H^+/U(\infty)_{\mathbb{Z}}} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w|<1\}$$

が得られる。$H^+/SL(2,\mathbb{Z})$ の toroidal compactif. $\overline{H^+/SL(2,\mathbb{Z})}$ は $H^+/SL(2,\mathbb{Z})$ と $\overline{H^+/U(\infty)_{\mathbb{Z}}}$ を張り合せて得られる。

次に、$f(z) \in A_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ を weight k の保型形式とする。$U(\infty)_{\mathbb{Z}}$ の各元の Jacobian は自明であることから、$f(z)$ は、$U(\infty)_{\mathbb{Z}}$-invariant，従って、$f(z)$ は次の様に Fourier 展開される：$f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m e^{2\pi\sqrt{-1}mz}$。この時、次が成り立つ。

<u>Theorem 3 (Tai [1], Chap IV, §1, Theorem 1)</u>

$f(z)(dz)^{\otimes k}$ が $\{\infty\}$ に holomorphic に拡張できるための必要十分条件は、"$m<k \Rightarrow a_m = 0$" を $f(z)$ が満たすことである。

<u>証明</u>. $f(z)(dz)^{\otimes k}$ を $\{\infty\}$ の回りの座標 $w = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ で書くと、

$$f(z)(dz)^k = \sum_{m\geq 0} a_m e^{2\pi\sqrt{-1}mz}(dz)^k$$

$$= \sum_{m\geq 0} a_m w^m \left(\frac{dw}{w}\right)^k = \sum_{m\geq 0} a_m w^{m-k}(dw)^k$$

である。定理の主張は、この式より、ただちに従う。$\boxtimes$

<u>Remark 1</u>. 一般の場合に toroidal compactif. を構成するには、まず、"実軸上の有理点と$\{\infty\}$"の概念を一般化する必要があるが、これに当るものが、"rational boundary component"と呼ばれるものである。([1], Chap III, §3, [5], §4 参照)

<u>Remark 2.</u> 埋め込み $H^+ \hookrightarrow \mathbb{C}$ は、$\{\infty\}$ に対して定まる H^+の tube domain としての実現 $H^+ = \mathbb{R}_{>0}\sqrt{-1} + \mathbb{R}$ と考えることが出来る。$\{\infty\}$ は $z = x+\sqrt{-1}y \in H^+$ で $\mathrm{Im}\, z = y \longrightarrow \infty$ と思う。一般の場合も、各 boundary component を一つ固定した時に、domain のある実現 (Siegel domain of 3^{rd} kind) が必要となる。([1], Chap. III, §4, [5], §5 参照)

<u>Remark 3</u>. 一般の場合も、Remark 2 の情況の下で、保型形式は Fourier-Jacobi 級数と呼ばれる展開を持ち、Theorem 3 と同様の結果が、$\{a_m\}$ を、Fourier-Jacobi 級数の係数で置き換えることで成り立つ。([1], Chap IV, §1. 参照)

§4. Boundary Component of $\mathcal{D}_{2d}$

Boundary component の正確な定義は [1], [5] を見て頂くことにして、この節では、$\mathcal{D}_{2d}$ の場合を説明する。Boundary component の中で大切なものは、<u>rational</u> boundary component と呼ばれるもので、これは頂度、H^+ の場合、∞ と実軸上の有理点に対応しているものである。

<u>Lemma 4</u>. (cf. [7])

$\mathcal{D}_{2d}$ の rational boundary components の集合と、L_{2d} の中の totally isotropic sublattices の集合の間には一対一の対応がある。

ここで L_{2d} の sublattice M が totally isotropic とは、$\langle x, y\rangle = 0$ for $\forall x, y \in M$ を満たす時を言う。L_{2d} の signature が $(2, 19)$ であることから、tot. isotropic sublattice の rank は、1 or 2 である。この時、対応する rat. boundary comp. は、それぞれ、次元 0 or 1 で、次元 1 の場合は、H^+ と解析的に同値である。

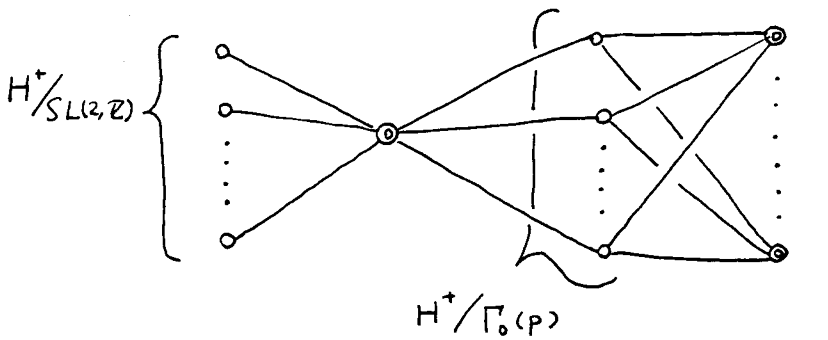
<u>Theorem 5</u> ([7], Thm. 4.0.1, Cor. 5.4.8, Ex. 5.5.6)

$d = p^2$ (p: 素数) と仮定する。この時、次が成り立つ。

(1) $\#\{\Gamma_{2d}$-inequivalent 0次元 rat. boundary comp. of $\mathcal{D}_{2d}\}$ $= \left[\frac{p+1}{2}\right]$。但し、[・]は Gauss 記号とする。

(2) $\#\{\Gamma_{2d}$-inequivalent 1次元 rat. boundary comp. of $\mathcal{D}_{2d}\}$ $= O(d^8) = O(p^{16})$。

(3) $(\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d})^*$ を $\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ の Satake's compactification とする。今、各 0 次元 rat. boundary comp. の $(\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d})^*$ における像を "◎"、各 1 次元 rat. boundary comp. の像を "○" で表わし、◎に対応する点が、○に対応する曲線の閉包に含まれるとき◎と○を線分で結ぶ： ◎—○ 。この時、境界 $(\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d})^* - \mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ の configuration は次の通りである：



但し、$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \bmod p \right\}$。

§5. 0次元 rational boundary component

§3.例で述べた作業を、0次元 rat. bdry compt. の場合に行なう。この場合、ある意味で、二つの type の 0次元 rat. bdry compt.

がある。詳しくは [2] を見て頂きたい。

以下、F を 0 次元 rat. bdry comp. とし、それを固定する。F を一つ定めると、それに対し $\mathcal{D}_{2d}$ は tube domain として実現される：

$$\mathcal{D}_{2d} = \left\{ z = (z_i) \in \mathbb{C}^{19} \;\middle|\; (\mathrm{Im}\, z_i) \in C(F) \right\},$$

但し、$C(F) = \left\{ (y_i) \in \mathbb{R}^{19} \;\middle|\; y_1 y_2 - g(y_3, \cdots, y_{19}) > 0,\ y_1 > 0 \right\}$ で、$y_1 y_2 - g(y_3, \cdots, y_{19})$ は、L_{2d} の symm. bil. form より induce される。符号が $(1, 18)$ の symm. bil. form である。

Γ_{2d} の部分群 $U(F)_{\mathbb{Z}}$ $(\cong \mathbb{Z}^{19})$ で、F を保ち、$\mathbb{C}^{19}$ に平行移動として作用するものが存在する。これが、§3 の $U(\infty)_{\mathbb{Z}}$ に対応するものである。平行移動の Jacobian は自明であるから、$f \in A_k(\Gamma_{2d})$ は、次の様な展開をもつ（これは Fourier-Jacobi 級数と呼ばれている）：

$$f = \sum_{\rho \in U(F)^*_{\mathbb{Z}} \cap \overline{C(F)}} \theta_\rho\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \rho, z \rangle}, \qquad \theta_\rho \in \mathbb{C},$$

但し、$\overline{C(F)}$ は $C(F)$ の閉包，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^{19}$ 上の内積、$U(F)^*_{\mathbb{Z}}$ はこの内積に関する双対とする。$\overline{\Gamma_{2d}} := \Gamma_{2d} \cap \mathrm{Aut}(C(F))$ と置くと Fourier 係数の一意性より

$$\theta_\rho = \theta_{\gamma\rho} \quad \text{for } {}^\forall \gamma \in \overline{\Gamma_{2d}}$$

が従う。但し、$\gamma\rho$ は $\langle \gamma\rho, \cdot \rangle = \langle \rho, \gamma \cdot \rangle$ で定まる作用で

ある。§3, Theorem 3 と同様の結果が成り立つが、それを考慮すると、我々は次の数を計算する必要がある：

$$h_F^d := \#\left\{ p \in U(F)_{\mathbb{Z}}^* \cap \overline{C(F)} \;\middle|\; \langle p, \ell \rangle < k \ \text{ for some } \ell \in U(F)_{\mathbb{Z}} \cap \overline{C(F)} \right\} \Big/ \overline{\Gamma}_{2d} .$$

<u>Theorem 6</u>. $\displaystyle\sum_F h_F^d \sim c_1 \cdot p^{19} \cdot k^{19}$.

但し、左辺の和で F は Γ_{2d}-inequivalent rat. 0-dim. bdry comp. を動くとし、c_1 は p, k に依存しない定数、"$\sim$" の意味は、
$\displaystyle\lim_{\substack{p\to\infty\\ k\to\infty}} \left(\sum h_F^d \big/ p^{19} \cdot k^{19} \right) = c_1$ である。

証明は、Γ_2 の場合と比較することで得られる。F を $\mathcal{D}/\Gamma_2$ の boundary comp. と考えた時の $U(F)_{\mathbb{Z}}^1$, $\overline{\Gamma}_2$, h_F^1 と、上記の $U(F)_{\mathbb{Z}}$, $\overline{\Gamma}_{2d}$, h_F^d との関係を見る。h_F^d と h_F^1 との関係は、$[\overline{\Gamma}_2 : \overline{\Gamma}_{2d}]$、及び、埋め込み $U(F)_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow U(F)_{\mathbb{Z}}^1$ に depend している。h_F^1 が p に depend しないことに注意すると Th 6 が得られる。

<u>§6. 1次元 rational boundary component</u>

この節では、§3 で述べた作業を1次元 rat. bdry component の場合に行なう。この場合、§4 で述べた様に boundary curve は $H^+/SL(2,\mathbb{Z})$ と $H^+/\Gamma_0(p)$ の二種類が起り得、それぞれ議論する必要があるが、以下、まとめて概念を述べる。

以下、F を 1次元 rat. bdry comp. とし、それを固定して考える。F を一つ定めると $\mathcal{D}_{2d}$ は、パラメータ付き tube domain として実現できる：

$$\mathcal{D}_{2d} = \left\{ (\tau, w, z) \in H^+ \times \mathbb{C}^{17} \times \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}\, z - L_\tau(w, w) > 0 \right\} ,$$

ここで $L_\tau : \mathbb{C}^{17} \times \mathbb{C}^{17} \longrightarrow \mathbb{R}$ は real bilinear form で、τ に real analytic に depend しており、F を具体的に与えると L_τ も書き下すことができるが略する。上の実現を Siegel domain of 3^{rd} kind と呼ぶ。

Γ_{2d} の部分群 $U(F)_{\mathbb{Z}} (\cong \mathbb{Z})$ で F を保ち、$H^+ \times \mathbb{C}^{17} \times \mathbb{C}$ に次の様に作用するものが計算から解る：

$$U(F)_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \ni m \quad : (\tau, w, z) \mapsto (\tau, w, z + m) \ \text{ or } \ (\tau, w, z) \longmapsto (\tau, w, z + pm) \ 。$$

ここで m or pm は F の type に依って定まる。$U(F)_{\mathbb{Z}}$ の各元の Jacobian は自明であるから $f \in A_k(\Gamma_{2d})$ は次の様に展開される：

$$f = \sum_{m \geq 0} \theta_m(\tau, w)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\, m z} \quad \left(\text{or } \sum_{m \geq 0} \theta_m(\tau, w)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\, m z/p} \right)。$$

我々は、この Fourier-Jacobi 級数の係数に現われる関数 $\theta_m(\tau, w)$ の空間の次元を計算したい。f が保型形式であることと、Fourier-Jacobi 級数の係数の一意性より、次が成り立つ。

Lemma 7. F を1次元 rat. bdry comp. で、佐武のコンパクト化の boundary curve として $H^+/SL(2,\mathbb{Z})$ が対応するものとする。この時、$f \in A_k(\Gamma_{2d})$ に対し、f の Fourier-Jacobi 級数は

$$f = \sum_{m \geq 0} \theta_m(\tau, w)\, e^{2\pi\sqrt{-1}mz}$$

で与えられ、更に、次が成り立つ。

(i) $\theta_m(\tau, w+n) = \theta_m(\tau, w)$ for $n \in \mathbb{Z}^{17}$,

(ii) $\theta_m(\tau, w+\tau n) = \theta_m(\tau, w)\, e^{2\pi\sqrt{-1}m\{{}^t nKw + (\tau/2){}^t nKn\}}$ for $n \in \mathbb{Z}^{17}$

(iii) $\theta_m((a\tau+b)/(c\tau+d),\ w/(c\tau+d))$

$= \theta_m(\tau, w)\,(c\tau+d)^{19k}\, e^{-2\pi\sqrt{-1}m\{(c/2)(c\tau+d)^{-1}\, {}^t wKw\}}$

for $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$,

但し K は、L_{2d} と F より induce される negative definite rank 17 の lattice の交点行列である。

Remark. F に対応する bdry curve が $H^+/\Gamma_0(p)$ の場合も、$f = \sum_{m\geq 0} \theta_m(\tau,w)\, e^{2\pi\sqrt{-1}mz/p}$ が Fourier-Jacobi 級数で、(i) において $\mathbb{Z}^{17}$ を $(p\mathbb{Z})^{17}$、$SL(2,\mathbb{Z})$ を $SL(2,\mathbb{Z})(p)$ で置き換えれば、(i)～(iii) の同様な式が成り立つ。

Lemma 7 より、$\theta_m(\tau, w)$ は τ を fix すると θ-関数と考えることが出来る。

今、

$$\Theta_m^F := \left\{ \theta(\tau,w) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta(\tau,w) : H^+\times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ holomorphic function で} \\ \text{Lemma 7 の (i)～(iii) を満たす} \end{array} \right\}$$

と置く。Θ_m^F の次元を計算したいのであるが、notationが、やっかいなので詳細は[2]を見て頂くとし、非常に大ざっぱな方法を述べる。($\mathfrak{S}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ の場合は簡単で、[8]を参照されたし)。Θ_m^F は、θ-関数の変換公式を用いると、H^+上の保型形式のなす直線束と、rankが m に依存する H^+上の flat vector bundle の tensor 積の切断のなす空間と見ることができる。このことから、Theorem 5 の (ii) を考慮すると次を得る：

<u>Theorem 8</u>. (1) $\displaystyle \dim \sum_{m<k} \Theta_m^F \sim c_2 p^2 \cdot k^{19}$,

(2) $\displaystyle \sum_{F:\text{1-dim.}} \dim. \sum_{m<k} \Theta_m^F \sim c_3 \cdot p^{18} \cdot k^{19}$,

但し(2)の左辺の和は、Fが Γ_{2d}-inequivalent 1次元 rat. bdry comp. を動くものとする。また、c_2, c_3 は p, k に depend しない定数。

§7. 結論

問題(A)(§2)を解決するためには、次を計算する必要がある：

$$(\text{ヵ}) \quad \dim A_k(\Gamma_{2d}) - \sum_{F:\,1\text{-dim.}} \dim \sum_{m<k} \Theta_m^F - \sum_{F:\,0\text{-dim.}} h_F \text{。}$$

Mumford [3] による．Hirzebruch's Proportionality theorem より，

$$\dim A_k(\Gamma_{2d}) \sim c_4 \cdot \mathrm{vol}(\mathcal{D}_{2p^2}/\Gamma_{2p^2}) \cdot k^{19}$$

$$= c_4 \cdot \mathrm{vol}(\mathcal{D}_2/\Gamma_2) \cdot [\Gamma_2 : \Gamma_{2p^2}]\, k^{19} = c_5 \cdot [\Gamma_2 : \Gamma_{2p^2}]\, k^{19},$$

ここで c_4, c_5 は p, k に depend しない定数。

一方，計算より

$$[\Gamma_2 : \Gamma_{2p^2}] = O(p^{20}) \quad (\sim c_6 \cdot p^{20})$$

が解る。

この事と，Theorems 6, 8 より

$$(\text{ヵ}) = (c_7\, p^{20} - c_3\, p^{18} - c_1\, p^{19})\, k^{19} \qquad (c_7 : \text{定数})$$

で，$p \gg 0$ ならば，k^{19} の係数は正となり，toroidal compactif. の boundary まで，holomorphic に拡張される保型形式が，十分，たくさん存在することが従う。

<u>Remark</u>. 最後に，仮定 $d = p^2$ について注意しておく。今のところ，この仮定は落せない。一つは，p に依存しない

$\mathcal{D}_2/\Gamma_2$ と、写像 $\mathcal{D}_{2p^2}/\Gamma_{2p^2} \longrightarrow \mathcal{D}_2/\Gamma_2$ を通して比較する議論を、用いているからである。もう一点は、Theorem 6, 8 を証明する上で、Γ_{2p^2} の $\mathcal{D}_{2p^2}$ への作用等、具体的な計算を用いていることである。$d=p^2$ の場合、rat. bdry comp. が具体的に記述でき (due to Scattone [7])、これらの計算が可能となる。上の仮定を落した時の $\mathcal{D}_{2d}/\Gamma_{2d}$ の小平次元については、今のところ何も解っていないようである。

[参考文献]

[1] Ash et. al : Smooth compactification of locally sym. var., Math. Sci. Press.

[2] S. Kondo : On the Kodaira dimension of K3 surfaces, preprint.

[3] D. Mumford : Hirzebruch's proportionality principles ...., Invent. math. 42, 239 — 272 (1977)

[4] D. Mumford - J. Harris : On the Kodaira dim. of the moduli space of curves, Invent. math. 67, 23 - 86 (1982)

[5] Y. Namikawa : Toroidal compactification of Siegel space, Springer L.N. 812

[6] I. Piatetski - Shapiro, I.R. Shafarevich : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Izv. 35, 530 - 572 (1971).

[7] Scattone, F. : Memoirs of AMS, vol. 70, No. 374 (1987)

[8] Y. Tai. : On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties, Invent. math. 68, 425 - 439 (1982).